Olimpiai szakkör, 2010. április 9.

1. Mely a, b, c pozitív egész számok esetén igaz az, hogy $2^a - 1$ osztható b-vel, $2^b - 1$ osztható c-vel, és $2^c - 1$ osztható a-val?

(KöMaL B.4191.)

2. Igazoljuk, hogy 10-es számrendszerben az $\underbrace{111\dots1}_{5^n}$ szám minden pozitív osztója 1-re végződik.

(KöMaL B.4051.)

3. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ és $n|6^n - 1$, akkor $5|n$.

(KöMaL)

* * *

4. Legyen p prím. Milyen prímosztói lehetnek egy $1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1}$ alakú számnak, ahol a pozitív egész?

5. Igazoljuk, hogy végtelen sok $10k + 1$ alakú prím létezik.

6. Igazoljuk, hogy az $\dfrac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$ egyenletnek nincs egész megoldása.

(IMO Shortlist, 2006)

* * *

7. Legyen p^k prímhatvány. Milyen prímosztói lehetnek egy $1 + a^{p^k} + a^{2p^k} + \dots + a^{(p-1)p^k}$ alakú számnak, ahol a pozitív egész?

8. Igazoljuk, hogy végtelen sok $30k + 1$ alakú prím létezik.

9. Igazoljuk, hogy végtelen sok $210k + 1$ alakú prím létezik.

* * *

10. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész m-hez végtelen sok $mk + 1$ alakú prím létezik.

11. Legyen $a > 1$ és $n > 1$. Igazoljuk, hogy az $a^n - 1$ számnak van olyan prímhatvány osztója, amivel az $a - 1$, $a^2 - 1$, $\dots$, $a^{n-1} - 1$ számok egyike sem osztható.

12. Legyen F_n az n-edik Fibonacci-szám $(F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1})$. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 3$-ra az F_n-nek van olyan prímhatvány osztója, amivel az F_1, F_2, $\dots$, F_{n-1} számok egyike sem osztható.

Házi feladatok

13. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ és $n|3^n + 4^n$, akkor $7|n$.

(KöMaL)

14. Létezik-e olyan n pozitív egész, aminek pontosan 2000 prímosztója van, és $n|2^n + 1$?

(IMO 2000/5)

15. Mik azok az n pozitív egészek, amikre $n^2|2^n + 1$?

(IMO 1990/3)

16. Bizonyítsuk be, hogy ha $p > 2$ prím, akkor létezik olyan $q < p$ prím, amelyre $q^{p-1} - 1$ nem osztható p^2-tel.

(KöMaL N.208.)

17. Létezik-e olyan n pozitív egész, amire $2^n - 1$ minden prímosztója kisebb, mint $2^{n/1993}$?

18. Legyen tetszőleges $0 < k \leq n$ és $a > 1$ egész számok esetén

$$\binom{n}{k}_a = \frac{(a^n - 1)(a^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (a^{n-k+1} - 1)}{(a^k - 1)(a^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (a - 1)}.$$

(a) Igazoljuk, hogy $\binom{n}{k}_a$ egész szám.

(b) Léteznek-e olyan $0 < k < n < m$ és $a > 1$ egészek, amelyekre $\binom{m}{1}_a$ osztója $\binom{n}{k}_a$-nak?

(KöMaL A. 483.)

19. Igazoljuk, hogy ha $k < n < m$ pozitív egészek, akkor $\dfrac{F_n \cdot F_{n-1} \cdots F_{n-k+1}}{F_k \cdot F_{k-1} \cdots F_1}$ egész, de nem osztható F_m-mel.

20. Igazoljuk, hogy ha $n > 12$, akkor az F_n-nek van olyan prímosztója, amivel az F_1, F_2, $\dots$, F_{n-1} számok egyike sem osztható.