Olimpiai szakkör, 2017. szept. 29.

1. Egy sakkversenyen nők és férfiak vettek részt, mindenki játszott mindenkivel egyszer. Minden partiban a győztes 1, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén 1/2–1/2 pontot kaptak. Mindegyik versenyzőre teljesült az, hogy az általa a nők ellen elért összpontszám ugyanannyi volt, mint az általa a férfiversenyzők ellen elért összpontszám.

Bizonyítsuk be, hogy a verseny résztvevőinek száma négyzetszám volt.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy konvex sokszögnek mindig van három olyan, egymás melletti csúcsa, hogy e három csúcs által meghatározott háromszög körülírt köre tartalmazza a konvex sokszöget.

3. Az alábbi egyenletek közül melyekre igaz az, hogy végtelen sok megoldása van az egész számok körében: $x^2+y^2+z^2=3xyz, x^2+y^2+z^2=2xyz$, $x^2+y^2+z^2=xyz$?

4. Vannak-e olyan $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ háromváltozós polinomok, amikre teljesül az

$$(x-y+1)^3\cdot P+(y-z-1)^3\cdot Q+(z-2x+1)^3\cdot R=1$$

illetve az

$$(x-y+1)^3\cdot P+(y-z-1)^3\cdot Q+(z-x+1)^3\cdot R=1$$

azonosság?

5. Van véges sok négyzetünk, melyek összterülete 4. Bizonyítsuk be, hogy elhelyezhetők a síkon úgy, hogy lefedjenek egy 1 oldalhosszúságú négyzetet.

6. Egy 10×10-es tábla mezőire n zsetont akarunk elhelyezni úgy, hogy ne legyen köztük 4 olyan, amelyek egy, a tábla oldalaival párhuzamos oldalú téglalap csúcsait alkotják. Mi az a legnagyobb n érték, amire ez megtehető?

Jutalomfeladat. Van egy *trimérlegünk*, ennek három serpenyője van. Ha súlyokat teszünk a serpenyőkbe, és a súlyok között egy legkisebb van, akkor annak a serpenyője felemelkedik, ha két vagy három legkisebb súly van, akkor a serpenyők mozdulatlanok maradnak. Van 6 érménk, amik közül 2 hamis, nehezebbek a jó érméknél. A trimérleg két mérésével állapítsuk meg, hogy melyik 2 érme a hamis.

Pelikán József