Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2001

2001/1. Hány olyan $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ polinom van, amelynek együtthatói 100-nál nem nagyobb különböző pozitív egészek és $p(x)$ osztható $x^2 + x + 1$-gyel?

2001/2. Legyenek a, b olyan pozitív egészek, hogy

$$p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

prímszám. Legfeljebb mekkora lehet p?

2001/3. Bizonyítsuk be, hogy a t területű háromszögben

$$4t\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) \leq 9R^2,$$

ahol R a köréírt kör sugara.

2001/4. (a) Az O középpontú r sugarú K körnek P belső pontja, $OP = p$. Az A és B pontok a K-nak olyan pontjai, amelyekre AP és BP merőlegesek egymásra. Mi az AB szakaszok F felezőpontjainak a mértani helye, ha A és B minden megengedett helyzetet felvesz?

(b) Az O középpontú r sugarú G gömbnek P belső pontja, $OP = p$. Az A, B, C pontok a G-nek olyan pontjai, amelyekre AP, BP, CP szakaszok páronként merőlegesek egymásra. Mi az ABC háromszögek S súlypontjainak a mértani helye, ha A, B, C minden megengedett helyzetet felvesz?

2001/5. Egy számtani sorozat tagjai és differenciája is pozitív egészek. A sorozat első n tagjának a tízes számrendszerbeli alakjában sehol sem szerepel 9-es számjegy. Legfeljebb mekkora lehet n?

2001/6. Legyenek p és q rögzített relatív prím pozitív egészek. A nemnegatív egészek egy S részhalmazát ideális részhalmaznak nevezzük, ha a következő két feltétel egyszerre teljesül:

(i) S tartalmazza a nullát;

(ii) ha $n \in S$, akkor $n + p \in S$ és $n + q \in S$.

Határozzuk meg az S ideális részhalmazok számát.