Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2002

2002/1. Keressük meg mindazon pozitív egész n számokat ($n \geq 2$), melyekre teljesül a következő: Minden n-hez relatív prím a és b szám esetén n akkor és csak akkor osztója $(a-b)$-nek, ha $(ab-1)$-nek is.

2002/2. A K kerületű háromszög csúcsainak távolságösszege a sík tetszőleges P pontjától D, a háromszög oldalegyeneseinek távolságösszege P-től M. Bizonyítsuk be, hogy

$$4D^2 \geq 4M^2 + K^2.$$

2002/3. Adott 101 darab különböző súlyú érme. Közülük 50 darab ezüst, melyek súly szerinti sorrendjét ismerjük. A többi 51 arany, ezek sorrendje is ismert. Van egy kétkarú mérlegünk, mely össze tud hasonlítani egy-egy érmét. Hogyan találhatjuk meg 7 méréssel a 101 érme közül a középsőt?

2002/4. Keressük meg mindazon véges

$$(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$$

sorozatokat, melyekben minden i-re ($i = 0, 1, 2, ..., n$) az x_i értéke éppen a sorozatban szereplő i számok számával egyenlő.

2002/5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges valós $x_1, x_2, ..., x_n$ számokra teljesül, hogy

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + ... + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

2002/6. Adott a síkon n olyan pont, hogy bármely kettejük távolsága egész szám ($n \geq 4$).

(a) Bizonyítsuk be, hogy n=4 esetén van két pont, amelyeknek távolsága 3-mal osztható.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $n > 4$ esetén a pontok között fellépő távolságoknak legalább az egyhatoda osztható 3-mal.