Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2004

2004/1. Egy hóbortos zöldséges csak háromfajta gyümölcsöt árul, almát, körtét és narancsot. Egyszerre csak egyetlen szem gyümölcsöt vehetünk, de hajlandó egy vásárlót napjában több alkalommal is kiszolgálni. Az árak is furcsák: egy alma éppen annyi tallér, ahány körte van még a boltban. Egy körte kétszer annyi tallér, mint ahány narancs van a boltban. Egy narancs éppen háromszor annyi tallér, mint ahány alma van a boltban.

Furfangos Frigyes egy reggel kifigyelte, hogy a boltban az almák, körték és narancsok száma éppen a=6, k=7, n=3. Szeretné megvásárolni mind a 16 darabot. Legkevesebb hány tallérra van szüksége Frigyesnek és milyen sorrendben vásárolja meg a gyümölcsöket? (Feltételezzük, hogy aznap más vásárló nem volt.) Határozzuk meg a szükséges összeget általában is a, k, n függvényében!

2004/2. Az ABC háromszögben $AC = BC$, a beírt kör középpontja K. Legyen P az AKB háromszög köré írt kör olyan pontja, mely az ABC háromszög belsejében van. Párhuzamosakat húzunk P-n át az AC és BC szárakkal. Ezek AB-t rendre a D és E pontokban metszik. Párhuzamost húzunk P-n át AB-vel is, ez AC-t és BC-t rendre az F és G pontokban metszi. Igazoljuk, hogy a DF és EG egyenesek metszéspontja az ABC köré írt körön van.

2004/3. Egy pozitív egész számot közvetlenül egymás után kétszer leírva *dupla* számot kapunk. (Pl. dupla szám a 357357, amit a 357-ből kaptunk.) Bizonyítsuk be, hogy a négyzetszámok között végtelen sok dupla szám van.

2004/4. Az 1, 2, ..., N számok mindegyike piros vagy zöld. Egyszerre három szám színét megváltoztathatjuk, ha számtani sorozatot alkotnak. Mely N-re érhető el bármilyen színezésről indulva, hogy minden szám piros legyen?

2004/5. Az $ABCD$ konvex négyszög megfelelő csúcsainál meghúztuk a külső szögfelezőket, ezek a, b, c, d. Metszéspontjaik $a \cap b = K$, $b \cap c = L$, $c \cap d = M$, $d \cap a = N$. Tudjuk, hogy a K-ból AB-re, L-ből BC-re, M-ből CD-re bocsátott merőlegesek egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ húrnégyszög.

2004/6. Az a, b, c valós számokat úgy választottuk, hogy pontosan egy olyan négyzet van, melynek minden csúcsa rajta van az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvény grafikonján. Igazoljuk, hogy a négyzet oldala $\sqrt[4]{72}$.