Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2006

2006/1. Legyen $H = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. A H halmaz egy részhalmazát összefüggőnek nevezzük, ha csak egyetlen számot, vagy néhány szomszédos számot tartalmaz. Határozzuk meg a legnagyobb k egész számot, amelyre megadható $H-$nak k részhalmaza úgy, hogy közülük bármely két különbözőnek a metszete összefüggő.

2006/2. Az ABC háromszögben $AB + BC = 3AC$. A beírt kör az AB és BC oldalakat rendre D és E pontokban érinti, a beírt kör középpontja I. D-t és E-t az I pontra tükrözve a G és H pontokat kapjuk. Igazoljuk, hogy $ACGH$ húrnégyszög.

2006/3. Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1 \tag{1}$$

teljesül $\mathbf{R}$ minden x, y elemére.

2006/4. Határozzuk meg az x és y valós számokat, ha $x \geq 1$, $y \geq 1$, továbbá A és B nem szomszédos egész számok, ahol $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ és $B = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$.

2006/5. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsából induló f félegyenes a B-ből induló BC és a D-ből induló DC félegyeneseket rendre az X és Y pontokban metszi. Az ABX és ADY háromszögek BX és DY oldalaihoz hozzáírt körök középpontjai rendre K és L. Igazoljuk, hogy a $KCL\angle$ nem függ f választásától.

2006/6. Határozzuk meg mindazon $n > 1$ egészeket, amelyekre egyértelműen létezik olyan a egész, amelyre $0 < a \leq n!$ és $n!$ osztója $(a^n + 1)$-nek.