Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2007

2007/1. Az $ABCD$ trapézban $AB||CD$, $AB > CD$. Legyenek K és L rendre az AB és CD szakaszokon úgy, hogy $AK : KB = DL : LC$. A KL szakasz P és Q pontjára teljesül, hogy $APB\angle = BCD\angle$ és $CQD\angle = ABC\angle$. Bizonyítsuk be, hogy $PQBC$ húrnégyszög.

2007/2. A $P_1P_2...P_n$ szabályos n szög oldalaira és átlóira ráírunk egy-egy pozitív egész számot, ezek közül a legnagyobb legyen r. A számozás során az 1, 2, ..., r számok mindegyikét legalább egyszer felhasználtuk. Bármely $P_iP_jP_k$ háromszög oldalai közül kettőn ugyanaz a szám áll, a harmadikon pedig egy kisebb. Határozzuk meg r legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét.

2007/3. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám van, amire $2^n + 3^n$ osztható n^2 -tel.

2007/4. Valós számok egy $a_0, a_1, a_2, ...$ sorozatát a következőképpen definiáljuk:

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{ha} \quad n \geq 1.$$

Igazoljuk, hogy $a_n > 0$, ha $n \geq 1$.

2007/5. Az ABC háromszögben

$$ACB\angle < BAC\angle < 90°.$$

Az AC oldalon van D pont, amelyre $BD = BA$. Az ABC háromszögbe írt kör az AB és AC oldalakat rendre K és L pontokban érinti. Legyen a BCD háromszögbe írt kör középpontja J. Igazoljuk, hogy a KL egyenes áthalad az AJ szakasz felezőpontján.

2007/6. Adott n pont a síkban, semelyik három nincs egy egyenesen, jelölje ezt a halmazt S. Legyen P olyan konvex sokszög, melynek minden csúcsa S beli pont, $a(P)$ jelölje P csúcsainak számát, $b(P)$ jelölje az S halmazból P-n kívül eső pontok számát. Bizonyítsuk be, hogy minden valós x esetén

$$\sum_{P} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1,$$

ahol az összeg végigfut az összes lehetséges P-n. A szakaszt, a pontot és az üres halmazt is konvex sokszögnek tekintjük, rendre 2, 1, 0 csúccsal.