Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2008

2008/1. Legyen n adott pozitív egész. A pozitív egészeket ki szeretnénk színezni 2 színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy teljesüljön a következő két feltétel: (i) mindkét szín végtelen sokszor szerepel, (ii) bármely n különböző piros szám összege piros és bármely n különböző kék összege kék. Van-e ilyen színezés, ha (a) $n = 2007$; (b) $n = 2008$?

2008/2. Tekintsük azon $f : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}^+$ függvényeket, amelyekre minden $m, n \in \mathbf{N}^+$ esetén teljesül:

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1.$$

Határozzuk meg $f(2007)$ lehetséges értékeit. ($\mathbf{N}^+$ a pozitív egészek halmazát jelöli.)

2008/3. Legyen az ABC háromszög beírt körének BC-n lévő érintési pontja D. Igazoljuk, hogy az AD-re D-ben állított merőlegesnek a B, illetve C csúcsnál lévő belső szögfelező közti szakaszát D felezi.

2008/4. Legyenek b és n 1-nél nagyobb egészek. Tegyük fel, hogy minden $k > 1$ egész esetén van olyan a_k egész, amelyre $b - a_k^n$ osztható k-val. Igazoljuk, hogy $b = A^n$, ahol A egész.

2008/5. Az $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontja P. A BC és AD párhuzamos egyenesek közti Q pontra $AQD\angle = CQB\angle$, a CD egyenes elválasztja P-t és Q-t. Bizonyítsuk be, hogy $BQP\angle = DAQ\angle$.

2008/6. Legyen $c > 2$. Az $a(1), a(2), \ldots$ nemnegatív valós számok sorozatáról két dolgot tudunk:

(i) $a(m+n) \leq 2a(m) + 2a(n)$ minden pozitív egész m, n esetén;

(ii) $a(2^k) \leq \dfrac{1}{(k+1)^c}$ minden nemnegatív egész k esetén. Bizonyítsuk be, hogy az $a(n)$ sorozat korlátos.