Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2009

2009/1. A derékszögű koordinátarendszerben nevezzük doboznak az olyan téglalapokat, amelyeknek oldalai a tengelyekkel párhuzamosak. Ha két doboznak van közös belső, vagy határpontja, akkor őket metszőknek nevezzük. Legfeljebb mekkora lehet n, ha megadható n doboz $B_1, B_2, ..., B_n$ úgy, hogy B_i és B_j akkor és csak akkor metszők, ha n nem osztja sem $i-(j+1)$-et, sem $i-(j-1)$-et?

2009/2. Az ABC háromszög beírt köre az AB és AC oldalakat rendre a D és E pontokban érinti. A beírt körnek és az AEB háromszög köré írt körnek E-től különböző közös pontja legyen F, a D pont merőleges vetülete az EB egyenesen G. Igazoljuk, hogy $2ABE\angle = BFG\angle$.

2009/3. Igazoljuk, hogy a

$$\binom{2^n-1}{0}, \quad \binom{2^n-1}{1}, \quad \binom{2^n-1}{2}, \quad \ldots, \quad \binom{2^n-1}{2^{n-1}-1}$$

számok csupa különböző, páratlan maradékot adnak 2^n -nel osztva.

2009/4. Határozzuk meg minden pozitív egész n esetén az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz elemeinek azon $(a_1, a_2, ..., a_n)$ permutációinak számát, amelyekre $2(a_1 + a_2 + ... + a_k)$ osztható k-val minden $k = 1, 2, ..., n$ esetén.

2009/5. Az $ABCD$ konvex négyszög belsejében adottak a P és Q pontok úgy, hogy $PQDA$ és $QPBC$ húrnégyszögek. Tegyük fel, hogy a PQ szakasznak egy E pontjára teljesül, hogy $PAE\angle = QDE\angle$ és $PBE\angle = QCE\angle$. Mutassuk meg, hogy $ABCD$ húrnégyszög.

2009/6. A $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú polinom együtthatói egész számok, $a \neq 0$. Tegyük fel, hogy végtelen sok x, y egész számpárra teljesül, hogy $xP(x) = yP(y)$, ahol $x \neq y$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan k egész, amelyre $P(k) = 0$.