Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2011

2011/1. A sík minden rácspontját kifestjük pirosra vagy kékre. Bizonyítsuk be, hogy van a rácspontoknak végtelen, egyszínű, centrálszimmetrikus részhalmaza.

2011/2. Az a, b, c, d valós számokra $a+b+c+d = 6$ és $a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$. Igazoljuk, hogy

$$36 \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leq 48.$$

2011/3. Aladár es Balambér egy nagyon okos testvérpár. Zsuga professzor egy kísérletet végez velük. Leülteti a testvérpárt két különböző szobában, majd megkever egy 52 lapos kártyát és a lapokat sorban leteszi Aladár elé egy asztalra, színükkel felfele. Aladár egy lépése abból áll, hogy megnevez két lapot és megmondja, hogy közöttük hány kártya van. A professzor ezt az információt továbbítja Balambérnak. A cél az, hogy Balambér a lehető legkevesebb lépés után meg tudja mondani az 52 kártya sorrendjét. (Az közömbös, hogy balról jobbra, vagy jobbról balra vannak ebben a sorrendben.) Mennyi ez a minimális lépésszám?

2011/4. Mely pozitív egész n esetén lehet az 1,2,...,n számokat olyan sorrendben leírni, hogy véve bármely néhány –legalább 2– egymást követő számot, azok átlaga ne legyen egész.

2011/5. Az ABC háromszög síkjában levő P pontra $APB\angle = BPC\angle = CPA\angle = 120°$. Igazoljuk, hogy az AP, BP, CP egyenesek tükörképei rendre a BC,CA, AB egyenesekre egy ponton mennek át.

2011/6. Legyenek a és b egészek, $P(x) = ax^3 + bx$. Egy tetszőleges pozitív egész n esetén azt mondjuk, hogy az $(a; b)$ pár n–jó, ha $n|(P(m) - P(k)$–ból következik, hogy $n|m - k$, minden m, k egészre, Az $(a; b)$ párt nagyon jónak nevezzük, ha végtelen sok pozitív egész n-re n–jó.

(a) Adjunk megy egy $(a; b)$ párt, amely 51–jó, de nem nagyon jó.

(b) Igazoljuk, hogy minden 2010–jó pár nagyon jó.